ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és
Kollégium – Hatévfolyamos képzés

Matematika 7. osztály

VI. rész: Elemi geometria

Készítette: Balázs Ádám

Budapest, 2020. április 8.

Tartalomjegyzék

97. óra Geometriai alapfogalmak

Állítás. A geometria alapfogalmai, melyeket nem definiálunk a következők:

- Pont: két metsző vonal találkozása, nincs kiterjedése. Jele: P, Q, stb.
- Egyenes: végtelen hosszú, mindkét irányban haladó vonal. Jele: e, f, stb.
- Sík: két irányban végtelen, a harmadik irányban nincs kiterjedése. Jele: $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$
- Tér: minden, ami körülvesz minket; 3 különböző irány létezik. Jele: $\mathbb{R}^3$

Def (Félegyenes)**.** Egy egyenest egy pontja két félegyenesre bontja. Ez a pont a félegyenes végpontja. A félegyenes hossza végtelen és kisbetűvel jelöljük[1].

Def (Szakasz)**.** Egy egyenes két különböző pontja által meghatározott véges része. Kisbetűvel, vagy a két végpontjával jelöljük. Pl.: c vagy $\overline{AB}$

Def (Félsík:)**.** Egy síkot egy egyenese két részre osztja, ezek a félsíkok.

Def (Féltér:)**.** A teret egy sík két féltérre osztja, ezek a félterek.

Állítás. Térelemek kölcsönös helyzetei a következők lehetnek:

- Két pont kölcsönös helyzete: illeszkednek, vagy nem illeszkednek egymásra.
- Két egyenes kölcsönös helyzete a térben háromféle lehet:
  - Párhuzamos: egy síkban vannak és $\nexists$ közös pontjuk vagy $\forall$ pontjuk közös[2].
  - Metsző: az egyeneseknek pontosan 1 darab közös pontjuk van.
  - Kitérő: nincsenek egy síkban, ekkor egyetlen közös pontjuk sincs.
- Két sík kölcsönös helyzete:
  - Párhuzamosak, ha $\nexists$ közös pontjuk vagy $\forall$ pontjuk közös[3].
  - Metszik egymást, ha van közös pontjuk. Ekkor egy m egyenesben metszik egymást, és így végtelen sok közös pontjuk van.
- Pont és egyenes: ha $P \in e$ akkor illeszkedik rá, ha $P \notin e$ akkor nem illeszkedik.
- Pont és sík: ha $P \in \mathcal{S}$ akkor illeszkedik rá, ha $P \notin \mathcal{S}$ akkor nem illeszkedik.
- Egyenes és sík kölcsönös helyzete:
  - Párhuzamosak, ha $\nexists$ közös pontjuk vagy $\forall$ pontjuk közös[4].
  - Metszők, ha az egyenesnek és a síknak pontosan 1 közös pontja van.

[1] A félegyenes jelölhetjük kezdőpontjának és egy másik pontjának megadásával is, pl: OP félegyenes.
[2] Utóbb esetben azt mondjuk, hogy az egyenesek illeszkedők is.
[3] Utóbb esetben azt mondjuk, hogy a síkok illeszkedők is.
[4] Ekkor az egyenes illeszkedik a síkra.

1. Feladat. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak!

1. Bármely két különböző ponthoz csakis egyetlen egyenes illeszkedik.
2. Minden síkhoz illeszkedik három nem egy egyenesre illeszkedő pont.
3. Bármely három nem egy egyenesbe eső ponthoz csakis egy sík illeszkedik.
4. Ha egy egyenesről tudjuk, hogy kettő különböző pontja illeszkedik egy síkhoz, akkor az egész egyenes is biztosan illeszkedik a síkhoz.
5. Ha két síknak van egy közös pontjuk, akkor kell legyen még egy közös pontjuk.
6. Létezik a térben négy olyan pont, amelyek nem esnek mind egy egyenesbe és nincsenek rajta egy közös síkon.
7. Adott a síkon három pont, melyek meghatároznak egy háromszöget. A sík egy egyenese nem megy át a háromszög csúcsain, de metszi az egyik oldalt. Igaz-e, hogy még egy oldalt metsz az egyenes?
8. Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g-t.

97. Házi feladat. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a.) Egy ponton át hány egyenes húzható?

b.) Hány különböző pont határoz meg egyértelműen egy egyenest?

c.) Ha nincs közös pontja két egyenesnek, akkor párhuzamosak-e?

d.) Mikre bontja fel a síkot két merőleges egyenes?

e.) Igaz-e, hogy három különböző pont mindig meghatároz egy síkot?

f.) Egy egyenes és egy pont milyen feltétel mellett határoz meg egy síkot?

97. Szorgalmi. Nézz utána, hogy mit mondott a párhuzamosságról Bolyai János!

98. óra Szögek

Def (Szög)**.** Egy pontból kiinduló, két félegyenes által határolt síkrészt szögnek nevezünk. A közös végpont a szög csúcsa, a két félegyenes a szög két szára.

Megjegyzés. Adott pontból kiinduló két félegyenes mindig két szöget határoz meg, ezért a félegyenesek közé rajzolt körívvel és egy görög betűvel jelezzük, hogy melyik szögtartományról van szó.

Def (Fok, szögperc, szögmásodperc)**.** A teljes kör 360°, ennek 1/360-ad része 1 fok. Ennek 1/60 része a szögperc, jele: $1'$. Ennek 1/60 része a szögmásodperc, jele: $1''$.

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

2. Feladat. Add meg fokban a következő szögeket!

a.) $3^\circ 14' 32'' =$

b.) $24^\circ 27' 21'' =$

c.) $12^\circ 23' 42'' =$

Def. A nevezetes szögek a következők:

- Nullszög: $\alpha = 0^\circ$
- Hegyesszög: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- Derékszög: $\alpha = 90^\circ$
- Tompaszög: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- Egyenesszög: $\alpha = 180^\circ$
- Homorúszög: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$
- Teljes szög $\alpha = 360^\circ$

Def (Forgásszög)**.** Egy szög egyik szárát megjelöljük és a másik szárba a közös végpont körül forgatjuk. Az így kapott szöget forgásszögnek nevezzük. A forgásszöget nagyságával és irányával adjuk meg. A pozitív irány az óramutató járásával ellentétes.

98. Házi feladat. Szerkeszd meg az alábbi forgásszögeket: $+60^\circ$, -30°, $+90^\circ$, -120°

98. Szorgalmi. Nézz utána, hogy miért 360 fokra osztják fel a teljes kört!

99. óra Szögpárok

Def (Szögpárok)**.** Az egymáshoz képest speciális (sajátos) helyzetű szögek.

- Egyállású szögek: Ha két szög szárai párhuzamosak és páronként megegyező irányúak, akkor azokat egyállású szögeknek nevezzük. Az egyállású szögek egyenlők.
- Váltószögek: Ha két szög szárai párhuzamosak és páronként ellentétes irányúak, akkor azokat váltószögeknek mondjuk. A váltószögek egyenlők.
- Csúcsszögek: Azokat a váltószögeket, amelyeknek szárai egy egyenesbe esnek, csúcsszögeknek nevezzük. A csúcsszögek is egyenlők.
- Kiegészítő szögek: Ha két szög szárai párhuzamosak és az egyik szögszáruk egyező, a másik pedig ellentétes irányú, akkor azokat kiegészítő szögeknek mondjuk. A kiegészítő szögek összege 180°, azaz egymást 180°-ra egészítik ki.
- Mellékszögek: Azokat a szögeket, amelyeknek egyik száruk közös, a másik szögszáruk egy egyenesre illeszkedik és ellentétes irányú, mellékszögeknek hívjuk. Mivel kiegészítő szögek, összegük 180°.
- Pótszögek: Azokat a szögeket, amelyek összege 90°, pótszögeknek mondjuk. A derékszögű háromszögek hegyesszögei egymás pótszögei.
- Merőleges szárú szögek: A merőleges szárú konvex szögek szárai páronként merőlegesek egymásra. Vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást.

99. Házi feladat. Oldjuk meg az alábbi feladatokat! 1 2 3 4

99. Szorgalmi. Zöld hátterű feladat

100. óra Feladatok

101. óra Térelemek távolsága

Def (Távolság)**.** Az X és az Y alakzat pontjai között húzható összes szakasz közül a legrövidebbnek a hosszúsága a két alakzat távolsága. Jele: $d(X,Y)$. Tulajdonságai:

1. A távolság mindig egy nemnegatív valós szám: $d(X,Y) \geq 0$.
2. Szimmetrikus, azaz $d(X,Y) = d(Y,X)$.
3. Akkor és csak akkor 0, ha az alakzatok illeszkedők.
4. A legrövidebb út mindig az egyenes: $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

Állítás. Térelemek távolsága a következő:

- Két pont távolsága:
  - Ha P illeszkedik Q-ra, akkor $d(P,Q) = 0$.
  - Ha nem illeszkedők, akkor távolságuk a $\overline{PQ}$ szakasz hossza.
- Két egyenes távolsága:
  - Ha e illeszkedik f-re, vagy metszi f-et, akkor $d(e,f) = 0$.
  - Ha $e \parallel f$, akkor az egyikből a másikra állított merőleges szakasz hossza.
  - Ha kitérők, akkor a mindkét egyenesre állított merőleges szakasz hossza[1].
- Két sík távolsága:
  - Ha $\mathcal{S}_1$ illeszkedik $\mathcal{S}_2$-re, akkor $d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = 0$.
  - Ha $\mathcal{S}_1 \parallel \mathcal{S}_2$, akkor az egyik sík bármely pontjából a másik síkra állított merőleges szakasz hossza a távolság.
- Pont és egyenes távolsága:
  - Ha $P \in e$, akkor $d(P,e) = 0$.
  - Ha $P \notin e$, akkor P-ből e-re állított merőleges szakasz hossza a távolság.
- Pont és sík távolsága:
  - Ha $P \in \mathcal{S}$, akkor $d(P,\mathcal{S}) = 0$.
  - Ha $P \notin \mathcal{S}$-re, akkor P-ből $\mathcal{S}$-re állított merőleges szakasz hossza a távolság.
- Egyenes és sík távolsága:
  - Ha $e \subset \mathcal{S}$, akkor $d(e,\mathcal{S}) = 0$.
  - Ha $e \not\subset \mathcal{S}$, akkor az e egyenes bármely E pontjából az $\mathcal{S}$ síkra állított merőleges szakasz hossza a távolság.

100. Házi feladat. Adott egy egyenes. Hol vannak a tőle 2 cm-re lévő pontok?

100. Szorgalmi. Adott egy 3 cm-es szakasz. Hol vannak a tőle 2 cm-re lévő pontok?

[1] Ennek neve normáltranszverzális, mely mindig egyértelműen megszerkeszthető.

102. óra Feladatok térelemek távolságára

3. Feladat. Adjuk meg az e egyenestől 3 cm távolságra lévő pontok halmazát!

4. Feladat. Adjuk meg az e egyenestől legalább 3 cm távolságra lévő pontok halmazát!

5. Feladat. Adjuk meg az e egyenestől kisebb, mint 3 cm-re lévő pontok halmazát!

6. Feladat. Adjuk meg a P ponttól 3 cm távolságra és az e egyenestől 2 cm távolságra lévő pontok halmazát a síkon!

101. Házi feladat. Adjuk meg a P ponttól 3 cm-nél nem nagyobb távolságra és az e egyenestől 2 cm-nél kisebb távolságra lévő pontok halmazát a síkon.

101. Szorgalmi. Adjuk meg a P ponttól 3 cm-nél nem nagyobb távolságra és az e egyenestől 2 cm-nél kisebb távolságra lévő pontok halmazát a térben.

103. óra Térelemek hajlásszöge

Def (Két egyenes bezárt szöge)**.** Az f és a g egyenesek hajlásszöge ha

- illeszkedők vagy párhuzamosak, akkor $\alpha = 0°$.
- metszők, akkor a keletkezett szögtartományok nem nagyobbika. $0° < \alpha \leq 90°$.
- kitérők, akkor a tér tetszőleges pontján átmenő, velük $\|$ egyenesek hajlásszöge.

Def (Egyenes és sík bezárt szöge)**.** Az e egyenes és az $\mathcal{S}$ sík hajlásszöge ha

- illeszkedők vagy párhuzamosak, akkor $\alpha = 0°$.
- metszők, akkor az egyenes és a síkra eső merőleges vetületének[1] bezárt szöge.
- merőleges, akkor az egyenes a sík minden egyenesére merőleges. Jele: $e \perp \mathcal{S}$

Def (Két sík bezárt szöge)**.** Az $\mathcal{S}_1$ és az $\mathcal{S}_2$ síkok hajlásszöge ha

- illeszkedők vagy párhuzamosak, akkor $\alpha = 0°$.
- metszők, akkor az $m = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ metszésvonalának egy pontjából merőlegest állítunk az m-re mindkettő síkban. Ezen egyenesek bezárt szöge a síkok hajlásszöge.

102. Házi feladat. Készíts modellt, mely két térelem szögét mutatja be!

102. Szorgalmi. Hogyan értelmezzük két görbe vonal (vagy felület) hajlásszögét?

[1] Képzeljük el, hogy a síkra merőlegesen érkezik fény. Ekkor az egyenes síkra eső árnyéka a vetület.

104. óra Szerkesztések megengedett lépései

Állítás. A szerkesztések során megengedett két eszköz az egyélű, beosztás nélküli, tetszőleges hosszúságú vonalzó, és egy bármekkorára kinyitható körző.

Állítás. A megengedett elemi szerkesztési lépések a következők:

(1) Két adott ponton át felvehető egyenes: $f = \text{Egy}(A; B)$

(2) Felvehető két egyenes metszéspontja: $P = e \cap f$

(3) Két adott pont távolsága körzőnyílásba vehető: $r = d(A; B)$

(4) Felvehető egy adott pont körüli adott sugatú kör: $k = \text{Kör}(O; r)$

(5) Felvehetők két kör metszéspontjai: $\{P_1; P_2\} = k_1 \cap k_2$

(6) Felvehetők egyenes és kör metszéspontjai: $\{P_1; P_2\} = k \cap e$

Megjegyzés. Csak vonalzós szerkesztésnél használható: (1) és (2) művelet. Ha csak körzős szerkesztésről van szó, akkor csak (3), (4) és (5) lépés megengedett.

Állítás. Az alapszerkesztések a következők:

(A) Szakaszfelező metszéspont szerkesztése.

(B) Felezőmerőleges szerkesztése

(C) Szögmásolás

(D) Szögfelezés

(E) Merőleges szerkesztése adott pontból[1].

(F) Nevezetes szögek szerkesztése: $60°, 30°, 90°, 45°, 60°, 120°, 150°, 135°, 75°, 15°$

(G) Párhuzamos szerkesztése adott ponton át vagy adott távolságban.

103. Házi feladat. Egy alapszerkesztési feladat megoldása a megengedett elemi szerkesztési lépésekből.

103. Szorgalmi. Még egy alapszerkesztési feladat megoldása a megengedett elemi szerkesztési lépésekből.

[1]Ezzel a szerkesztéssel lehet adott körhöz érintőt szerkeszteni a körívre illeszkedő pontján át.

105. óra Nevezetes ponthalmazok: körök

Def (Ponthalmaz)**.** A sík vagy a tér meghatározott tulajdonságú pontjai[1].

Def (Kör)**.** Az O adott ponttól adott r távolságra levő pontok halmaza a síkon[2].

Def (A kör nevezetes pontjai és vonalai:)**.**

- Középpont (O): Az adott pont.
- Sugár (r): Az adott távolság.
- Körív: A kört két pontja két körívre bontja.
- Szelő: Olyan egyenes, melynek 2 metszéspontja van a körrel.
- Húr: A szelő körbe eső szakasza; a körív két pontját összekötő szakasz.
- Átmérő (d): Olyan húr, ami áthalad a kör középpontján. $d = 2r$
- Érintő: Olyan egyenes, amelynek pontosan egyetlen metszéspontja van a körrel, és egyik pontja sincs a körön belül.

Tétel. A kört érintő e egyenes merőleges az E érintési pontba húzott sugárra.

Bizonyítás. Indirekten feltesszük, hogy az állítás hamis, az érintő nem merőleges az érintési pontban húzott sugárra. Az O-ból merőlegest húzunk e-re, így kapjuk a $T \in e$ pontot. Mivel $OT \perp e$, így $OTE_{\triangle}$ derékszögű. A háromszögben $OE = r$ átfogó, az $OT < r$ befogó lenne. Ez lehetetlen, mert ekkor a T a kör belső pontja lenne, de érintőnek nem lehet belső pontja. Így a feltevés hibás, az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra. □

Állítás. Körhöz P külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

Def (A kör további részei:)**.**

- Zárt körlap: O-tól r-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkon.
- Nyílt körlap: O-tól r-nél kisebb távolságra levő pontok halmaza a síkon.
- Körcikk: A körlap két sugár közé eső része. A két sugár szöge a középponti szög.
- Körszelet: A körlapból egy szelő által lemetszett síkrész.
- Körgyűrű: Két koncentrikus[3] kör között lévő pontok halmaza.

Állítás (Kerület, terület.)**.** Az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, területe $r^2\pi$.

104. Házi feladat. Szerkessz kört, és cérna segítségével mérd meg a kerületét!

104. Szorgalmi. Szerkessz kört négyzetrácsos papírra és becsüld meg a területét!

[1] Halmazjelölésekkel is megadhatók.
[2] Térben $g = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, O) = r\}$ adja meg az O középpontú r sugarú gömböt.
[3] Közös a középpontjuk.

106. óra Nevezetes ponthalmazok: egyenesek

Def (Párhuzamos egyenespár)**.** Adott e egyenestől adott egyenlő d távolságra lévő pontok halmaza a síkon.

Def (Szakaszfelező merőleges)**.** A és B pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon. $P \in f_{AB} \iff d(P, A) = d(P, B)$

Def (Szögfelező)**.** Az e és f metsző egyenesektől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon. Létezik g belső és h külső szögfelező. $P \in g \vee h \iff d(P, e) = d(P, f)$

Tétel. A külső és a belső szögfelezők merőlegesek egymásra.

Bizonyítás. α belső és α' külső szög mellékszög, összegük 180°. A szögfelezők szöge:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

□

105. Házi feladat. Szerkessz - elemi szerkesztési lépések segítségével - tetszőleges nevezetes egyeneseket!

105. Szorgalmi. Geogebrában végezd el a szerkesztéseket!

107. óra Nevezetes ponthalmazok: kúpszeletek

Def (Ellipszis)**.** Két adott ponttól adott távolságösszegre lévő pontok halmaza a síkon.

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{S} : d(P, A) + d(P, B) = r\}$$

Megjegyzés. Fókuszpontjai az adott A és B pontok. Szerkeszteni csak a pontjait lehet, vagy cérnaszállal. Szimmetriatengelyei az AB egyenes és az AB szakasz felező merőlegese. A szimmetriatengelyek határozzák meg a nagytengelyt és a kistengelyt.

Def (Hiperbola)**.** Két adott ponttól adott távolságkülönbségre lévő pontok halmaza a síkon.

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathcal{S} : |d(P, A) - d(P, B)| = r\}$$

Megjegyzés. Fókuszpontjai az adott A és B pontok. Szerkeszteni csak a pontjait lehet. Szimmetriatengelyei az AB egyenes és az AB szakasz felező merőlegese. A hiperbolát a "*végtelen távoli pontjában*" érinti az aszimptota.

Def (Parabola)**.** Adott e egyenestől és egy rá nem illeszkedő F ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon.

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{S} : d(P, F) = d(P, e)\}$$

Megjegyzés. Fókuszpontja az adott F pont, az e neve vezéregyenes. Szerkeszteni csak a pontjait lehet. Szimmetriatengelye átmegy a fókuszponton, és merőleges a vezéregyenesre. Tengelypontja a fókuszpont és a vezéregyenes felezőpontja.

106. Házi feladat. A kört, az ellipszist, a hiperbolát és a parabolát összefoglaló neven kúpszeleteknek nevezzük. Keress egy ábrát, melyen látszanak, hogy hogyan kell egy kettős kúpból ezeket a ponthalmazokat megalkotni. Készíts rajzot!

106. Szorgalmi. Készíts modellt a rajz helyett egy kúpszelethez!

108. óra Szerkesztési feladatok

7. Feladat. Szerkessz háromszöget, melynek oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúságúak!

Vegyél fel egy egyenest, rajta egy pontot és abból mérd rá az egyenesre az 5 cm-t. Az egyik pontból vegyél fel 4 cm sugárral egy körívet, a másikból 3 cm-rel.

8. Feladat. Szerkessz O középpontú, 4 cm sugarú kört, és vegyél fel a köríven egy tetszőleges E pontot. Szerkeszd meg a kör E pontbeli érintőjét!

Vedd fel az OE egyenest. Körívezz az E pont körül és abból a két pontból, ahol elmetszette a körív az egyenest, újra körívezz. Ezzel megkaptad az E-re illeszkedő, OE egyenesre merőleges egyenest, ami a éppen a keresett érintő.

9. Feladat. Szerkeszd meg egy tetszőleges háromszög magasságpontját!

Vegyél fel egy körívet az egyik csúcsból, ami két pontban metszi a szemközti oldalt[1]. A két pontnak szerkezd meg a felezőpontját. Ezt kösd össze a csúcsal, ezzel megkapod a magasságvonalat. Mindhárom magasságvonalat megszerkesztve azok egy ponton mennek át és ezek metszéspontja a magasságpont.

10. Feladat. Szerkeszd meg egy tetszőleges háromszög súlypontját!

Kösd össze a háromszög csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjaival, így megkapod a súlyvonalakat! Ezek egy pontok mennek át, a közös metszéspont a lesz a súlypont.

11. Feladat. Szerkeszd meg egy háromszög köré írható körének középpontját!

Szerkeszd meg egy háromszög mindhárom oldalfelező merőlegesét! A három oldalfelező merőleges egy ponton megy át, a közös metszéspont a köré írható kör középpontja.

12. Feladat. Szerkezd meg egy háromszög beírható körének középpontját!

Szerkeszd meg egy háromszög mindhárom szögfelezőjét! A három szögfelező ponton megy át, a közös metszéspont a beírható kör középpontja.

107. Házi feladat. Mindegyik fenti szerkesztési feladatot megoldani!

107. Szorgalmi. Mi az az Euler-egyenes?

[1] Vagy annak meghosszabbításával kapott oldalegyenest.

109. óra Háromszögek

Def (Háromszög)**.** Három, nem egy egyenesben lévő pont[1] meghatároz egy $\triangle$-t.

Def. A háromszögeket szögeik alapján az alábbi három kategória egyikébe sorolhatjuk.

- Hegyesszögű $\triangle$: Minden szöge hegyesszög.
- Derékszögű $\triangle$: Egyik szöge derékszög, a másik kettő hegyesszög.
- Tompaszögű $\triangle$: Egyik szöge tompaszög, a másik kettő hegyesszög.

Def. A háromszögeket oldalaik alapján

- Általános $\triangle$: Minden oldala különböző hosszúságú, minden szöge különböző.
- Egyenlő szárú $\triangle$: Két oldala egyenlő hosszú, ezek a szárak, a harmadik az alap[2].
- Szabályos $\triangle$: Mindhárom oldala egyenlő hosszúságú. Szögei egyenlők, 60°-osak.

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)**.** Egy $\triangle$ bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál[3]:

$$a + b > c \qquad a + c > b \qquad b + c > a$$

Tétel. Egy $\triangle$ belső szögeinek összege 180°, tehát: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Bizonyítás. Húzzunk AB oldallal párhuzamost C csúcson keresztül. C-nél keletkezett δ és ε szögek a γ szöggel együtt 180 fokosak, mert egyenesszöget alkotnak. Váltószögek δ és α, valamint ε és β, tehát egyenlők. Ebből adódik, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

Def (Külső szög)**.** Egy $\triangle$ belső szögének mellékszöge.

$$\alpha' = 180° - \alpha \qquad \beta' = 180° - \beta \qquad \gamma' = 180° - \gamma$$

Tétel. Egy $\triangle$ külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szög összegével.

$$\alpha' = \beta + \gamma \qquad \beta' = \alpha + \gamma \qquad \gamma' = \alpha + \beta$$

Bizonyítás. $\alpha' = 180° - \alpha = \alpha + \beta + \gamma - \alpha = \beta + \gamma$ (β' és γ' esetén hasonlóan) □

Tétel. Egy $\triangle$ külső szögeinek össze 360 fok: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

Bizonyítás. A belső szögek összegére és a külső szögekre vonatkozó tétel alapján:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \beta + \gamma + \alpha + \gamma + \beta + \alpha = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°$$

□

108. Házi feladat. Hogyan számítható ki egy háromszög kerülete és területe?

108. Szorgalmi. Indokold meg a házi feladatban leírt állításaidat!

[1]Ha egy egyenesbe esnek a pontok, azt úgy nevezik, hogy a pontok kollineárisak.
[2]Az alap akár ugyanolyan hosszúságú is lehet, mint a szárak. Ekkor a háromszög szabályos is.
[3]Egyenlőség esetén ún. elfajuló háromszögről van szó.

110. óra Háromszögek nevezetes vonalai

Súlyvonal, magasságvonal, belső szögfelező, oldalfelező merőleges, középvonal

109. Házi feladat. Szerkeszd meg egy háromszög magasságvonalait, belső szögfelezőit, súlyvonalait, oldalfelező merőlegeseit, középvonalait!

109. Szorgalmi. Mutass háromszögeket, melyeknél egyes nevezetes vonalak egybeesnek!

111. óra Háromszögek nevezetes vonalainak metszéspontja

Súlypont, magasságpont, szögfelezők metszéspontja, oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

110. Házi feladat. Szerkeszd meg egy háromszög köré írható körének középpontját, magasságpontját és súlypontját. Milyen összefüggést vélsz felfedezni?

110. Szorgalmi. Mi az a Feuerbach-kör?

112. óra Háromszög külső szögfelezői, középvonalai

Tétel. Egy háromszög M magasságpontja, S súlypontja és köré írható körének O középpontja egy egyenesre esik. Ez az háromszög Euler-egyenese.

Megjegyzés. S súlypont O-hoz közelebbi harmadolópontja az MO szakasznak.

Def. A háromszög egy külső szögfelezője az egyik szög külső szögének felezője.

Tétel. Egy háromszög belső szögfelezője és a két másik külső szögfelezője olyan pontban metszik egymást, amely mindhárom oldalegyenestől egyenlő távolságra van.

Megjegyzés. Ebből a pontból mindhárom oldalegyenest érintő kör szerkeszthető, ez a háromszög egy hozzáírt köre.

Def. A háromszög középvonala a két oldal felezőpontjait összekötő szakasz.

Tétel. A középvonal párhuzamos a vele szemközti oldallal és fele olyan hosszú.

Megjegyzés. A középvonal négy egybevágó kisebb háromszögre pontja az eredetit.

111. Házi feladat. Szerkeszd meg egy háromszög hozzáírt köreit!

111. Szorgalmi. Igazold, hogy a háromszög két oldala úgy aránylik egymáshoz, mint a hozzájuk tartozó magasságok reciproka!

113. óra Thalész tétele

Tétel (Thalész-tétel)**.** Ha egy kör egy átmérőjének végpontjait összekötjük a körvonal bármely más pontjával, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója az átmérő.

Bizonyítás. Kössük össze a kör AB átmérőjének két végpontját a körvonal egy tetszőleges C pontjával, majd a C pontot a kör O középpontjával. Az OC sugár a két háromszögre bontja az ABC háromszöget. Mindkét háromszög egyenlő szárú, hiszen $AO = OC = OB$. Ebből következik, hogy $ACO\angle = CAB\angle$ és $BCO\angle = ABC\angle$. Az ABC szögeinek összege $2 \cdot ACO\angle + 2 \cdot BCO\angle = 180°$, ebből adódik, hogy a keresett szög nagysága: $ACB\angle = ACO\angle + BCO\angle = 90°$ □

Tétel (Thalész-tétel megfordítása)**.** Minden derékszögű háromszögben a köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.

Bizonyítás. Adott ABC derékszögű △. Tükrözzük a háromszöget az AB átfogó F felezési pontjára. A C pont tükörképe D. $BCAD$ síkidom téglalap, amelynek átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást az F pontban. Az F egyenlő távol van a háromszög mindhárom csúcsától, ezért ez a háromszög köré írt körének a középpontja. □

13. Feladat. Szerkesszünk kör külső pontjából érintőt a körhöz!

Szerkesszük meg a kör középpontjának és a külső pontnak a Thalész-körét! Az eredeti kör és a Thalész-kör metszéspontjain át húzzunk egyeneset a külső ponton keresztül!

14. Feladat. Adott két pont. Szerkesszünk az egyik pont körül kört úgy, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintőszakasz adott e hosszúságú legyen!

Legyen a két adott pont P és Q, az érintőszakasz e. Az E érintési pont rajta van PQ Thalész körén, és e távolságra van P-től. A megoldás, ha létezik, a Q középpontú, QE sugarú kör.

15. Feladat. Írjunk kört az egyenlő szárú háromszög egyik szára, mint átmérő fölé. Bizonyítsuk be, hogy ez a kör felezi a háromszög alapját!

AC szár, mint átmérő fölé írt kör Q-ban metszi AB alapot. A Thalész-tétel miatt $AQC\angle = 90°$. A CQ az ABC egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága, tehát felezi AB-t.

112. Házi feladat. Szerkesszük meg egy tetszőleges kör AB átmérőjét, bármelyik AC húrját és a húr meghosszabbítására mérjük fel a $CD = AC$ szakaszt. Igazoljuk, hogy az ABD háromszög egyenlő szárú!

112. Szorgalmi. Töltsd le a Geogebra programot, ismerjedj vele!

114. óra Négyszögek

Def (Töröttvonal)**.** Véges sok, egymáshoz csatlakozó szakasz. Lehet nyílt vagy zárt, illetve egyszerű vagy elfajult.

Def (Sokszög)**.** A sík egy zárt, egyszerű töröttvonallal határolt része[1].

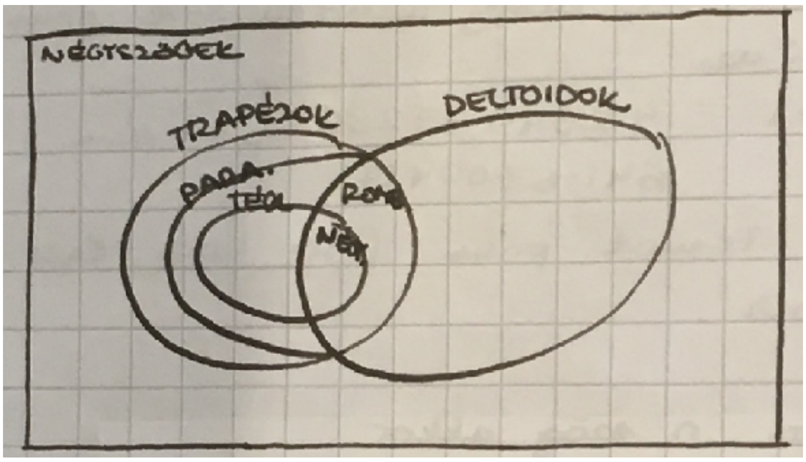
Def (Négyszög)**.** Olyan sokszög, amelynek négy oldala és négy csúcsa van

Megjegyzés. A szomszédos oldalaknak van közös csúcsuk, a szemközti oldalaknak nincs.

Def (Speciális négyszögek:)**.**

- Trapéz: Olyan négyszög, melynek van párhuzamos oldalpárja.
- Paralelogramma: Olyan négyszög, melynek szemközti oldalai párhuzamosak.
- Rombusz: Olyan négyszög, melynek oldalai egyenlő hosszúak.
- Deltoid: Olyan négyszög, melynek 2-2 szomszédos oldala egyenlő hosszú.
- Téglalap: Olyan négyszög, melynek belső szögei egyenlők.
- Négyzet: Szabályos négyszög, oldalai egyenlő hosszúak és belső szögei egyenlők.

113. Házi feladat. Rajzolj egy megfelelő négyszögeket a Venn-diagramba!



1. ábra. A négyszögek osztályozása

113. Szorgalmi. Rajzolj elfajult sokszögeket, négyszögeket!

[1] A sokszögeket idegen szóval poligonnak is hívják.

115. óra Speciális négyszögek

Tétel. Ha egy négyszög trapéz és deltoid is, akkor rombusz is.

Tétel. Ha egy négyszög rombusz, akkor paralelogramma is.

Tétel. A paralelogramma definíciójával egyenértékű tulajdonságok:

(0) $AB \parallel CD$ és $BC \parallel AD$

(1) Szemközti szögei egyenlők.

(2) Egy oldalon fekvő szögei kiegészítő szögek.

(3) Szemközti oldali egyenlők.

(4) Két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

(5) Két átlója felezi egymást, azaz középpontosan szimmetrikus.

114. Házi feladat. Bizonyítsd be a kimaradt állításokat!

114. Szorgalmi. Osztályozd a négyszögeket egyedi módon!

116. óra Sokszögek belső és külső szögei

Def (Konvex)**.** Egy alakzatot konvex, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát tartalmazza az alakzat.

Def (Konkáv)**.** Egy alakzatot konvex, ha létezik két olyan pontja, melyek összekötő szakaszát nem tartalmazza az alakzat.

Def (Átló)**.** Egy sokszög nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszai.

Tétel. Egy n oldalú konvex sokszög összes átlójának száma:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Bizonyítás. A konvex sokszög egy csúcsából $(n-3)$ átló húzható, mert önmagába és a két szomszédos csúcsba nem húzható átló. Mivel az n csúcs mindegyikéből $(n-3)$ átló húzható, így összesen $n \cdot (n-3)$ átló lenne, de minden átlót pontosan kétszer vettünk figyelembe (a két végpontjánál), ezért az átlók száma ennek a fele, azaz: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ □

Tétel. Egy n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege:

$$(n-2) \cdot 180°$$

Bizonyítás. Egy konvex sokszög egy csúcsából $(n-3)$ átló húzható[1], és ez az $(n-3)$ átló $(n-2)$ háromszögre bontja a konvex sokszöget. Mivel egy háromszög szögeinek összege 180°, ezért a sokszög belső szögeinek összege ennek alapján: $(n-2) \cdot 180°$ □

Tétel. Egy n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege mindig 360°.

Bizonyítás. Ennek belátásához húzzuk meg a sokszög minden egyes belső szögéhez tartozó külső szöget. A belső és a külső szögek összege minden egyes csúcs esetén 180°. Ezeknek az összeg n darab csúcs esetén: $n \cdot 180°$. Ha ebből kivonjuk a belső szögek összegét, megkapjuk a külső szögek összegét:

$$n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = n \cdot 180° - n \cdot 180° + 2 \cdot 180° = 360°$$

□

115. Házi feladat. Egy konvex sokszög belső ÉS külső szögeinek összege 2700°. Hány oldala van?

115. Szorgalmi. Mennyi egy konkáv sokszög belső szögeinek összege?

[1] Az előbbi bizonyításban már beláttuk ezt az állítást.

117. óra Geometriai transzformációk

Def (Geometriai transzformáció)**.** Ponthalmazok között létesitett megfeleltetés. Ha a transzformáció[1] P ponthoz a P' pontot rendeli, akkor P' pontot P képének nevezzük.

Def (Tengelyes tükrözés)**.** Ha adott a síkon egy t egyenes, akkor a sík t-re nem illeszkedő tetszőleges P pontjához hozzárendeljük a sík azon P' pontját, amelyre PP' szakasz felező merőlegese a t tengely. A tengely pontjaihoz önmagukat rendeljük.

Megjegyzés. A tengelyes tükrözésnek nevezett transzformáció tulajdonságai:

- A tengellyel párhuzamos egyenes képe: a tengelytől ugyanakkora távolságra haladó párhuzamos egyenes.
- A tengelyt metsző egyenes képe: a tengelyt ugyanabban a pontban, ugyanakkora szögben metsző egyenes.
- Távolságtartó: egy szakasz képe az eredetivel egyenlő nagyságú szakasz.
- Szögtartó: szög képe az eredetivel egyenlő nagyságú szög.
- Irányításfordító: az alakzatok körüljárását megváltoztatja.
- Fix pont: a t tengely pontjai és képei azonosak.
- Fix egyenes: t egyenes képe önmaga.
- Invariáns[2] egyenes: Minden $t \perp i$ egyenes képe önmaga, de i pontjai nem fixek.
- $A \longmapsto A'$ és $A' \longmapsto A$

116. Házi feladat. Adott t_1 és t_2 egyenesek, és P pont. Tükrözd a pontot t_1-re, majd annak képét tükrözd t_2-re!

116. Szorgalmi. Helyettesíthető-e a két tengelyes tükrözés egy darab tükrözéssel? Indokold meg egy tulajdonság alapján!

[1] Jelentése: átalakítás, átváltoztatás.

[2] Fix alakzatnak minden pontja külön-külön helyben marad. Az invariánsnak nem feltétlenül fixek a pontjai, de az összes pontjának a képe újra éppen az eredetit adja ki.

118. óra Pontra vonatkozó geometriai transzformációk

Def (Középpontos tükrözés)**.** Ha adott a térben egy O pont, akkor a tér tetszőleges O-ra nem illeszkedő P pontjához a tér azon a P' pontját rendeljük, amelyre PP' szakasz felezőpontja az O pont. Az O középponthoz önmagát rendeljük.

Megjegyzés. A középpontos tükrözésnek nevezett transzformáció tulajdonságai:

- Egyenes képes az eredetivel párhuzamos egyenes.
- Távolságtartó és szögtartó
- Irányítástartó: az alakzatok körüljárását megtartja.
- Fix pont: csak az O középpont
- Nincs fix egyenes.
- Invariáns egyenes: Minden O-ra illeszkedő egyenes képe önmaga.
- $A \longmapsto A'$ és $A' \longmapsto A$

117. Házi feladat. Adott O_1 és O_2 középpont és egy tetszőleges P pont. Tükrözd a P pontot O_1-ra, majd az így kapott pontot O_2-re! Ha felcseréled a középpontok szerepét vajon ugyanazt a pontot kapod?

117. Szorgalmi. Tükrözz egy háromszöget a súlypontjára!

119. óra Pont körüli forgatás

Def (Pont körüli forgatás)**.** Ha adott egy O pont és egy α irányított szög, akkor a sík O-tól különböző, tetszőleges P pontjához a sík azon P' pontját rendeljük, amelyre OP és OP' szakaszok egyenlők és $POP' = \alpha$. Az O ponthoz önmagát rendeljük.

Megjegyzés. A pont körüli forgatásnak nevezett transzformáció tulajdonságai:

- Egyenes képe az O-tól az eredetivel egyenlő távolságra haladó, az eredetivel az elforgatás szögét bezáró egyenes.
- Távolságtartó és szögtartó
- Irányítástartó: az alakzatok körüljárását megtartja.
- Fix pont: a O középpont képe minden esetben önmaga marad.
- Ha $\alpha = k \cdot 360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ akkor minden pont fixpont.
- Ha $\alpha = n \cdot 180°$ $(n \in \mathbb{Z})$ akkor O-ra illeszkedő egyenes invariáns.

Def (Identitás)**.** Az identikus transzformáció a tér minden pontjához önmagát rendeli, tehát az összes pontot helyben hagyja.

Megjegyzés. Az identikus transzformáció tulajdonságai:

- Minden pont fix pont, minden alakzat invariáns is.
- Távolságtartó, szögtartó, irányítástartó.
- Felcserélhető bármilyen más transzformációval.
- Ha sík egy egybevágóságának van három olyan fixpontja, ami nem esik egy egyenesre, akkor az csak az identitás lehet.
- Tekinthető $\alpha = k \cdot 360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ szögű forgatásnak bármely pont körül.
- Tekinthető két tükrözés egymásutánjaként[1]
- Tekinthető nullvektorral való eltolásként.

118. Házi feladat. Adott O pont és $\alpha = +45°$, illetve $\beta = -30°$ irányított szög. Vegyél fel egy P pontot és forgasd el O pont körül először α-val, majd annak képét β-val! Fordított sorrendben forgatva vajon változik a végső kép?

118. Szorgalmi. Van olyan forgatás, ami helyettesíthető egy középpontos tükrözéssel?

[1] Ugyanarra a tengelyre vagy pontra.

120. óra Az eltolás transzformáció

Def (Eltolás)**.** Ha adott egy $\vec{v}$ vektor, akkor a tér tetszőleges P pontjához a tér azon P' pontját rendeljük, amelyre P-ből P'-be mutató vektor egyenlő az adott $\vec{v}$ vektorral.

Megjegyzés. Az eltolás transzformáció tulajdonságai:

- Egyenes képe az eredetivel párhuzamos egyenes.
- Távolságtartó, szögtartó, irányítástartó.
- Ha $\vec{v}$ a nullvektor, akkor minden pont fixpont, egyébként nincs fixpont.
- Invariáns egyenes a $\vec{v}$ vektorral párhuzamos egyenes.
- Invariáns sík a $\vec{v}$ vektorral párhuzamos sík.

Def (Egybevágósági transzformációk:)**.** Azok a geometriai transzformációkat, amelyeknél bármely két pont távolsága egyenlő a pontok képeinek távolságával.

Megjegyzés. A távolságtartó transzformációk:

- Identitás
- Tengelyes tükrözések
- Pont körüli forgatások[1]
- Eltolások
- Ezek egymás után véges sokszor alkalmazott kombinációja.

119. Házi feladat. Adottak a t_1 és t_2 párhuzamos egyenesek. Tükrözd az $ABC_\triangle$-et először t_1-re, majd a háromszög képét t_2-re! Hogyan lehetne egyszerűbben megoldani?

119. Szorgalmi. Definiáld az síkra való tükrözést térben!

[1]Ez tartalmazza a középpontos tükrözést is

121. óra Az egybevágóság fogalma

Def (Egybevágó)**.** Az A és B alakzat egybevágó, ha távolságtartó transzformációval leképezhetőek egymásra, azaz eltolással, forgatással, tükrözéssel, illetve ezek kombinációjával fedésbe hozhatók. Jele: $A \cong B$

Megjegyzés. Az egybevágósági transzformációkat és azok tetszőleges egymásutánját összefoglalóan egybevágósági transzformációknak nevezzük[1].

Megjegyzés. Az egybevágóság két alakzat közötti reláció, melynek a tulajdonságai:

a.) Reflexív: Minden alakzat egybevágó önmagával, azaz $A \cong A$.

b.) Szimmetrikus: Ha $A \cong B$, akkor $B \cong A$.

c.) Tranzitív: Ha $A \cong B$ és $B \cong C$, akkor $A \cong C$.

120. Házi feladat. Szerkessz két alakzatot, melyek legyenek egybevágók és keresd meg azokat a konkrét transzformációkat, melyek az egyiket a másikba viszi.

120. Szorgalmi. A házi feladatban próbáld meg megkeresni azokat a transzformációkat, melyek a másik alakzatot viszik az egyikbe!

[1] Így azt mondhatjuk, hogy két alakzat egybevágó, ha létezik egybevágóság transzformáció, mely az egyik alakzatot a másikba viszi.

122. óra Háromszögek egybevágóságának alapesetei

Állítás. Két háromszög egybevágó, ha rájuk a következő feltételek egyike teljesül:

a.) Megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlők.

b.) Két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők.

c.) Egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő.

d.) Két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és a két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.

16. Feladat. Igazold, hogy két derékszögű háromszög egyenlő, ha tudjuk, hogy

1. két-két befogójuk egyenlő! *b*)
2. átfogójuk és egyik befogójuk egyenlő! *d*)
3. egy befogójuk és az ezzel szemközti szögük egyenlő! *c*)

17. Feladat. Ha két négyszög megfelelő oldalai megegyeznek, továbbá egy megfelelő szögük ugyanakkora, akkor igaz-e, hogy biztosan egybevágók?

$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, de a két négyszög közül az egyik konvex, a másik konkáv, tehát nem egybevágók.

18. Feladat. Szerkesszünk egyenlő szárú $\triangle$-et úgy, hogy adott a szára és a hozzá tartozó magassága!

1. m_a; $\perp$; $a \Rightarrow ATC_\triangle$
2. C középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_C$
3. $k_C \cap e\,(T;C) = B$

Nincs megoldás, ha $a < m_a$. Egy derékszögű megoldás van, ha $a = m_a$. Egy hegyesszögű és egy tompaszögű megoldás van, ha $a > m_a$.

121. Házi feladat. Bizonyítsd be, hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha átfogóik egyenlők.

121. Szorgalmi. Igaz-e, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha egy oldala és két szöge egyenlő?

123. óra A terület fogalma

Def (Terület)**.** Tekintsük az összes véges alakzatot és mindegyikhez rendeljünk egy számot, amit területnek nevezünk. A terület az alábbi feltételeknek felel meg:

1. Minden véges alakzat területe egy nemnegatív valós szám lehet.
2. Ha A és B alakzatok egybevágók, akkor területük egyenlő[1].
3. A és B diszjunkt alakzatokra $A \cup B$ területe A és B területének összege[2].
4. Az egységnyi oldalú négyzet területe 1 területegység.

Állítás. A háromszög területének összefüggései:

$$T_\triangle = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

$$T_\triangle = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r$$

$$T_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

$$T_\triangle = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Állítás. A speciális négyszögek területének összefüggései:

1. Téglalap: $T = a \cdot b$
2. Négyzet: $T = a^2$
3. Paralelogramma: $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$
4. Trapéz: $T = \frac{a+c}{2} \cdot m$
5. Rombusz és deltoid: $T = \frac{e \cdot f}{2}$

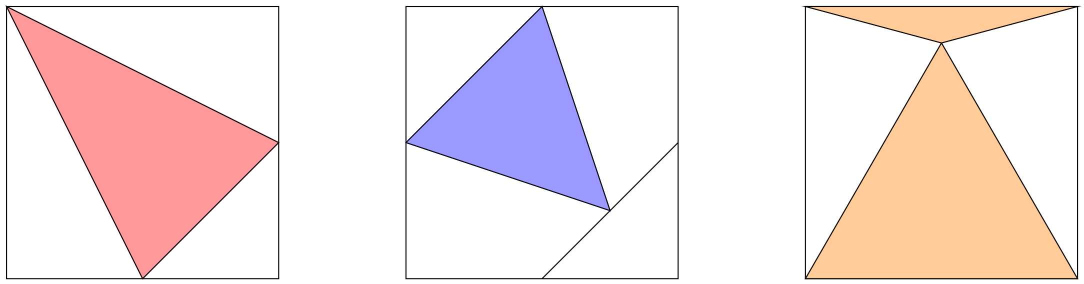
122. Házi feladat. Számítsd ki egy tetszőleges háromszög és egy négyszög területét!

122. Szorgalmi. Igazold a háromszög területének beírható kört tartalmazó képletét!

[1] Ennek megfordításával vigyázzunk, mert két azonos területű alakzat nem biztos, hogy egybevágó.
[2] Ha átfedés van közöttük, akkor a területből le kell vonni a közös részt.

124. óra A terület kiszámítása

19. Feladat. Mekkora része a négyzetek területének a színes alakzatok területe?



20. Feladat. Adott $ABC_{\triangle}$. Jelölje F_A, F_B és F_C az BC, CA, AB oldalak felezőpontját és legyen S az AF_A, BF_B súlyvonalak metszéspontja! Mutassuk meg, hogy

a) SF_C szakasz megfelezi a $BSA_{\triangle}$ területét!

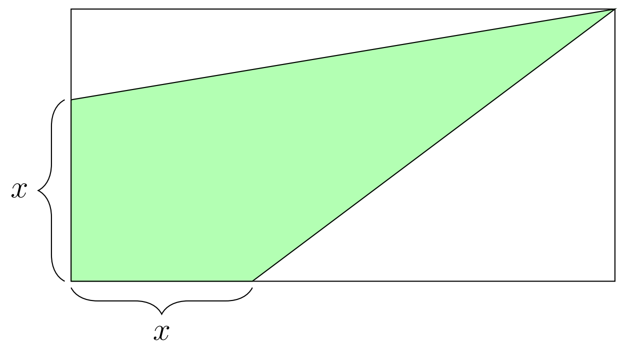
b) az SC szakasz megfelezi a $CSAB$ négyszög területét!

c) az $F_C\ SC$ töröttvonal megfelezi az $ABC_{\triangle}$ területét!

d) CF_C szakasz megfelezi az $ABC_{\triangle}$ háromszög területét!

e) az F_C súlyvonal is átmegy az S ponton!

21. Feladat. Az alábbi 1 : 2 oldalarányú téglalapban mekkora legyen x, hogy a színes alakzat területe a téglalap területének fele legyen?



123. Házi feladat. Egy téglalap oldalainak hossza 6 és 2 egység. Mekkora területű négyszöget zárnak közre a téglalap szögeinek szögfelezői?

123. Szorgalmi. Oldjuk meg a házi feladatot általánosan a és b oldalú téglalap esetén!

125. óra Szerkesztési feladatok

22. Feladat. Szerkessz paralelogrammát, ha adott: $a = 4$ cm, $e = 5$ cm, $m_a = 3$ cm.

23. Feladat. Adott A és O pont. Szerkessz 6 cm átlójú rombuszt, melynek A az egyik csúcsa és O pedig a szimmetriacentrum.

24. Feladat. Adott egy $ABC_\triangle$ és egy O pont. Tükrözd O pontra a háromszöget úgy, hogy nem férsz hozzá a csúcsokhoz, mert mindegyiken egy-egy kismacska pihen!

25. Feladat. Szerkessz paralelogrammát, ha adott: $a = 5$ cm, $e = 7$ cm, $f = 8$ cm.

26. Feladat. Szerkessz háromszöget, ha adott: $a = 4$ cm, $R = 3$ cm, $s_a = 5$ cm.

124. Házi feladat. Szerkessz $\triangle$-et, ha adott: $a = 5$ cm, $R = 4$ cm, $m_a = 3$ cm.

124. Szorgalmi. Szerkessz $\triangle$-et, ha adott: $a = 6$ cm, $R = 5$ cm, $m_b = 8$ cm.

126. óra Összefoglalás

27. Feladat. Szerkessz △-et az alábbi adatokból: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm és $c = 5$ cm. Tükrözd a háromszöget a magasságpontjára!

28. Feladat. Szabályos sokszög összes külső és belső szögének összege 2700°. Hány oldala és hány szimmetriaátlója van ennek a sokszögnek?

29. Feladat. Piros △-et O-ra tükrözve zöld △-et kapunk, de az ábra nagy része elveszett[1]. Megmaradt A csúcs és tükörképe A', az egyik magasságvonal tükörképének kicsi darabja (m'_c) és eredeti a egyik oldalából egy töredék. Szerkeszd meg az ábrát!

30. Feladat. Szerkessz háromszöget, ha adott: $a = 4$ cm, $m_a = 5$ cm, $s_a = 6$ cm.

125. Házi feladat. Szerkessz △-et, ha adott: $a = 4$ cm, $R = 5$ cm, $m_a = 6$ cm.

125. Szorgalmi. Szerkessz △-et, ha adott: $a = 4$ cm, $s_b = 5$ cm, $s_c = 6$ cm.

[1] Sajnos megették a macskák.

127. óra Témazáró dolgozat megírása