

ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és
Kollégium – Hatévfolyamos képzés

Matematika 9. osztály

II. rész: Kombinatorika

Készítette: Balázs Ádám

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

II. rész: Kombinatorika	3
6. Permutációk	3
7. Variációk	4
8. Kombinációk	5
9. Vegyes feladatok	6
10. Gyakorlás	7
11. Gyakorlás	8
12. Gyakorlás	9
13. Gyakorlás	10
14. Gyakorlás	11

6. óra Permutációk

1. **Feladat.** Hányféleképpen lehet az alábbi dolgokat sorba rendezni?

- A
- ABCD
- AB
- ABCDE
- ABC
- ABCDE...Z¹

Def (Permutáció). Adott n különböző elemet sorba rendezünk.

Állítás. Az n elemű halmaz összes permutációjának száma P_n .

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2. **Feladat.** Hányféleképpen lehet az alábbi dolgokat sorba rendezni?

- AAA
- AABB
- AAB
- AAAB

Def (Ismétléses permutáció). Adott n elemet sorba rendezünk, melyek között összesen s féle van és az i -edik elemből k_i darab egyforma.

Állítás. Az n elemű halmaz ismétléses permutációjának száma:

$$P_n^{(k_1; k_2; k_3; \dots; k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_s!}$$

6. **Házi feladat.** Hányféleképpen lehet sorba rakni 2 kék, 3 fehér és 4 piros gyöngyöt?

6. **Szorgalmi.** Hányféleképpen lehet sorba rendezni az alábbi betűsort?

ABBCCDDDDDEEEEEE...Z

¹Az angol ábécé 26 betűből áll

7. óra Variációk

3. Feladat. Ha 10 fő indult a futóversenyen, mindenki beért és nem volt holtverseny, akkor hányféleképpen alakulhat a dobogóra állók sorrendje?

4. Feladat. Egy könyvet, egy füzetet és egy mozijegyet kisorsolunk a 30 fős osztályban. Hányféleképpen tehetjük meg, ha egy ember max. egyet kaphat?

Def (Ismétlés nélküli variáció). Ha n elem közül kell kiválasztani k darabot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje számít és újra ugyanazt nem választhatjuk, hogy akkor azt n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációjának nevezzük. Jele: V_n^k

Állítás. V_n^k ismétlés nélküli variációk száma bármilyen $0 < k \leq n$ esetén:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ tényezős szorzat}}$$

5. Feladat. Hányféle rendszám lehet legfeljebb¹ Magyarországon?

6. Feladat. Egy könyvet, egy színházjegyet és egy mozijegyet kisorsolunk az osztályban. Hányféleképpen tehetjük meg, ha egy ember akár többet is kaphat?

Def (Ismétléses variáció). Ha n elem közül kell kiválasztani k darabot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje számít és újra ugyanazt is választhatjuk, hogy akkor azt n elem k -ad osztályú ismétléses variációjának nevezzük. Jele: $V_n^{k,i}$

Állítás. $V_n^{k,i}$ ismétléses variációk száma bármilyen $0 < k \leq n$ esetén:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

7. Feladat. Hány mobiltelefonszám létezik? Hány olyan van, aminek utolsó 7 jegye mind különböző?

8. Feladat. Hány négyjegyű páros szám létezik a tízes számrendszerben? Hány olyan van, aminek minden jegye különböző?

7. Házi feladat. Hány 6 jegyű szám létezik a tízes számrendszerben? Ezek közül hány darab van, olyan aminek minden jegye különböző?

7. Szorgalmi. Hány darab 3 jegyű, öttel osztható szám van a tízes számrendszerben?

¹Néhány lehetőséget láthatósági okokból kihagynak

8. óra Kombinációk

9. Feladat. A diákok ötfős csoportban dolgoznak, de csak hárman fogják majd elmondani a megoldást. Hányféleképpen lehet kiválasztani azt a három diákot a csoportból, akik ismertetik az eredményeket?

10. Feladat. A futóversenyen az 30 fős osztályból mindenki elindult, de a csak az első 4 jut tovább a következő fordulóra. Hányféle csapatot állíthat ki az osztály?

11. Feladat. Hányféleképpen lehet a lottó szelvényeket kitölteni?

Def (Ismétlés nélküli kombináció:). Ha n elem közül kell kiválasztani k darabot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és újra ugyanazt nem választhatjuk, akkor azt n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációjának nevezzük. Jele: C_n^k

Állítás. C_n^k ismétlés nélküli kombinációk száma bármilyen $0 < k \leq n$ esetén:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

12. Feladat. A szóbeli érettségi vizsgán az osztály 22 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek. Hányféleképpen lehet a 22 tanulóból véletlenszerűen kiválasztani az első csoportba tartozókat? (26334)

13. Feladat. A piacon az egyik pultnál hétféle gyümölcs kapható. Kati ezekből háromfélét vesz, mindegyikből 1-1 kilót. Hányféle összeállításban választhat Kati? (35)

8. Házi feladat. A lóversenyen a 18 indulóból a jós szerint csak 6 ló fog beérni. Hányféleképpen lehet fogadni egy befutó sorrendre, ha hiszünk a jósnak?

8. Szorgalmi. Egy 32 fős osztályból 8 fős csapat indul a versenyre, ám a versenyen derül ki, hogy csapatkapitányt is kell választani. Hányféle csapat jöhet létre? Mennyi ez a szám, ha már a csapat kiválasztása előtt ki kell választani a kapitányt?

9. óra Vegyes feladatok

14. Feladat. Hányan voltak a futóversenyen, ha 39916800 sorrendben érhetnek célba?

15. Feladat. Hányféleképpen állhat egy sorba 5 lány és 8 fiú, ha a lányok elöl állnak?

16. Feladat. Hányféleképpen ülhet le 8 ember az alábbi feltételek mellett?

a.) Egy hosszú egyenes asztal mellé ülnek le:

b.) Egy körasztalhoz ülnek le.

17. Feladat. A lóversenyen a 18 indulóból a jós szerint csak 6 ló fog beérni. Hányféleképpen lehet fogadni egy befutó sorrendre, ha hiszünk a jósnak?

18. Feladat. Egy 32 fős osztályból 8 fős csapat indul a versenyre, ám a versenyen derül ki, hogy csapatkapitányt is kell választani. Hányféle csapat jöhet létre? Mennyi ez a szám, ha már a csapat kiválasztása előtt ki kell választani a kapitányt?

19. Feladat. Hány olyan 7 jegyű szám van, melyben nem szerepel a 7-es számjegy?

20. Feladat. Hány olyan 7 jegyű szám van, melyben biztosan szerepel 7-es számjegy?

21. Feladat. Hány olyan különböző számjegyekből álló 6 jegyű szám van, melyben nem szerepel a 7-es és a 2-es számjegy?

22. Feladat. Hány páros 5 jegyű szám van? Hányad részüknek különbözőek a jegyei?

9. Házi feladat. Hányféle ötös lottón szelvényt lehet kitölteni, mely nyereményt ér¹?

9. Szorgalmi. Igazold a definíció alapján az alábbi állítást!

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

¹Az ötös lottón minimum két számot el kell találni a kifizetésért.

10. óra Gyakorlás

23. Feladat. Superman, Flash és Shazam versenyeznek. Hányféle különböző végeredménye lehet a versenynek, ha lehet holtverseny is?

24. Feladat. A Számgyárban háromjegyű páros számokat gyártanak a $\{0; 1; 2; 4\}$ számjegyekből. Mindegyikből bőven áll rendelkezésre, így ugyanaz a számjegy akár többször is szerepelhet. Hányféle különböző számot gyárthatnak?

25. Feladat. Roziknak 6 felsője van (piros, sárga, kék, fehér, zöld, rózsaszín) és 5 szoknyája (barna, lila, kék, sárga, tiritarka), és rémes stílusérzéke: bármit felvesz bármivel.

a.) Hányféle öltözéke lehet?

b.) A barátnője könyörgött neki, hogy legalább különböző színű ruhadarabokat vegyen fel. Hányad részére csökkent így a lehetőségek száma?

26. Feladat. Elemér minden matekórán kap vagy egy piros pontot, vagy egy fekete pontot, és a kapott pontokat a füzeté hátuljába rajzolja fel. Azért kétszer egymás után piros pontot nem szokott kapni. Hányféle sorminta alakulhat ki a füzetében?

a.) 3 egymást követő matekóra után?

b.) 4 egymást követő matekóra után?

c.) 5 egymást követő matekóra után?

d.) 10 egymást követő matekóra után?

27. Feladat. A Számgyárban továbbra is gyártják a háromjegyű páros számokat, de a klímatörvények miatt már a $\{1; 2; 4; 8\}$ számjegyekből és ugyanazt nem lehet felhasználni egy számon belül. Hányféle különböző számot gyárthatnak?

10. Házi feladat. Rozikának megvan mind a hat felsője és 5 szoknyájam, de újabban cipőt is hord, mégpedig kéket, szürkét, vagy barnát. Stílusérzékét nem zavarja, ha a felsője és cipője azonos színű, de azt semmiképpen sem szeretné, hogy „egymás mellett” ruhadarabjai (azaz felső és szoknya, vagy szoknya és cipő) azonos színűek legyenek. Így hány különböző összeállításban mehet iskolába Rozika?

10. Szorgalmi. Hányféle különböző kártya van a set-ben?

11. óra Gyakorlás

28. Feladat. A szórakozott professzor nagy bajban van: elfelejtette a széfje kódját, de annyit azért tud, hogy a kód négy számjegyből áll. Legfeljebb hány kódot kellhet végig próbálgatnia, ha

- a.) semmi másra nem emlékszik?
- b.) csak arra emlékszik, hogy a kód 5-össel kezdődik?
- c.) csak arra emlékszik, hogy a kód 5-össel kezdődik vagy 9-esre végződik?
- d.) csak arra emlékszik, hogy nem állt benne egymás mellett két azonos számjegy?
- e.) csak arra emlékszik, hogy pontosan egy darab 3-as szerepel benne?
- f.) csak arra emlékszik, hogy szerepel benne 8-as, de nem tudja, hogy hol?

29. Feladat. Egy kém azzal üzen a társának, hogy egy megadott helyen letesz egy sorba nyolc darab piros vagy kék korongot. Hányféle üzenetet továbbíthat így?

30. Feladat. Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hány kételemű részhalmaza van a H halmaznak? Sorold is fel az összeset!

11. Házi feladat. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

- a.) Hány négyjegyű szám van?
- b.) Hány négyjegyű szám van, melyben csak páros jegy van?
- c.) Hány négyjegyű szám van, melyben nincs páros jegy?
- d.) Hány négyjegyű szám van, melyben van páratlan jegy?
- e.) Hány négyjegyű szám van, melyben van páros jegy?

11. Szorgalmi. Legfeljebb hány bástyát helyezhetünk el egy 8×8 -as sakktáblán úgy, hogy egyik se üssön olyan mezőt, amelyiken áll bástya? Hányféleképpen tehetjük meg?

12. óra Gyakorlás**31. Feladat.** Hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a.) $\frac{100!}{96!} =$

e.) $\frac{n!}{(n-1)!} =$

b.) $8! - 7 \cdot 7! =$

f.) $\frac{(n+2)!}{n!} =$

c.) $\frac{10! + 9!}{8!} =$

g.) $\frac{9! + 10!}{8! - 6!} =$

d.) $\frac{10! - 8!}{7!} =$

h.) $\frac{1}{n} - \frac{(n-1)!}{n!} =$

32. Feladat. Hányféle nyolcjegyű szám készíthető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?

a.) Ha párosnak kell lennie?

b.) Ha égyyel oszthatónak kell lennie?

33. Feladat. Az 1, 2, 3, 4 számjegyeket használva hány ötjegyű számot lehet készíteni?**12. Házi feladat.** Hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény?**12. Szorgalmi.** Hányféleképpen lehet 10 találatosod a totón?

13. óra Gyakorlás

34. Feladat. Leírtuk a pozitív egész számokat 1-től 122-ig. Hány számjegyet írtunk le? Melyik számjegyet írtuk le a legtöbbször, melyiket a legkevesebbszer?

35. Feladat. Egy társaságban volt 5 férfi és 6 nő. A férfiak egymással kezet fogtak, a hölgyek egymásnak „Szervusz drágám!”-ot köszöntek. A férfiak a hölgyeknek kezet csókoltak. Hány kézfogás, kézcsók és „Szervusz drágám” köszöntés volt?

36. Feladat. András és Andrea, illetve Béla és Bella, valamint Csaba és Csenge házastársak. Hányféle sorrendben ülhetnek egypadon, ha

- a.) bárki bárki mellett ülhet?
- b.) felváltva ülhetnek férfiak és nők?
- c.) a házastársak egymás mellett ülnek?
- d.) a házastársak nem ülhetnek egymás mellett?

37. Feladat. Hány háromelemű részhalmaza van egy 6 elemű halmaznak?

38. Feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket egyszer felhasználva felírjuk az összes ötjegyű számot.

- a.) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik szám lesz a százegyedik?
- b.) Hányadik helyen áll a 42531?
- c.) Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét!

13. Házi feladat. 5 fiú és 5 lány táncolni megy. Hányféleképpen lehet kialakítani a táncpárokat ha mindenki egyszerre táncol és fiúk csak lányokkal, lányok csak fiúkkal táncolnak?

13. Szorgalmi. Adj meg olyan szót, amelynek betűiből pont 20 különböző betűsorozat készíthető!

14. óra Gyakorlás

39. Feladat. Egy nagy kosárban 12 alma és 10 barack található. Jancsi kivesz egy gyümölcsöt a tálból és utána Juliska egy almát és egy barackot is. Melyik esetben van Juliskának több választási lehetősége: ha Jancsi almát vagy ha barackot választott?

40. Feladat. A keresett telefonszám 7 számjegyből áll és az első biztosan négyes, továbbá van benne pontosan három darab kettés. Hány telefonszámot kellene végigpróbálgatni, hogy megtaláljuk akit keresünk?

41. Feladat. Négy házaspár leül egy körasztalhoz. Tudjuk, hogy sem férfiak, sem nők sem házastársak sem ülnek egymás mellett. Hányféle sorrend lehetséges?

42. Feladat. A buszjegyeken 1-től 9-ig találunk számokat. A lyukasztó legalább 2, de legfeljebb 4 számot kilyukaszt. Hány darabos készletet hordjon magával a bliccelő, hogy mindig legyen nála megfelelő jegy? Mennyibe kerülne ez a készlet?

43. Feladat. 200 ládából 150-ban I. osztályú, 50-ben II. osztályú alma található. Hányféleképpen vehetünk olyan 40 ládából álló mintát, melyben II. osztályú alma nem haladja meg a 20%-ot?

44. Feladat. Pontból és vízszintes vonalból hányféle jelet készíthetünk, ha legfeljebb három pontot és legfeljebb három vonalat használhatunk fel?

45. Feladat. Hányféleképpen lehet kiosztani hat tanuló között 9 különböző tárgyat, ha valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt és többiek 1-1 tárgyat kapnak?

14. Házi feladat. 10 ember utazik egy vonatfülkében. Négyen menetiránynak megfelelően, hárman menetiránynak háttal szeretnének utazni, a többi három embernek közömbös hogyan utazik. Hányféle sorrendben ülhetnek le?

14. Szorgalmi. Adott a térben n ($n \geq 3$) pont, melyek közül bármely négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg?