ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és
Kollégium – Hatévfolyamos képzés

Matematika 8. osztály

V. rész: Térgeometria

Készítette: Balázs Ádám

Budapest, 2020. június 6.

Tartalomjegyzék

64. óra A térfogat és a felület fogalma

Def. (Térfogat)**.** Tekintsük az összes testet és mindegyikhez rendeljünk egy számot, amit térfogatnak nevezünk. A térfogat az alábbi feltételeknek felel meg:

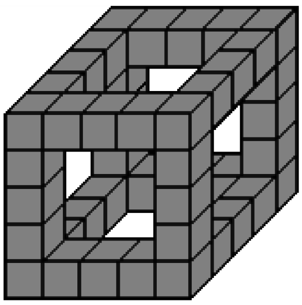
1. Minden véges test térfogata egy nemnegatív valós szám: $V \geq 0$
2. Ha két test egybevágó, akkor térfogatuk ugyanannyi: $A \cong B \Longrightarrow V_A = V_B$
3. A és B diszjunkt testek esetén $A \cup B$ test térfogata V_A és V_B összege.
4. Az egységnyi élű kocka térfogata 1 térfogategység.
5. $A \subset B$ testek esetén $V_A < V_B$.

Megjegyzés. A térfogat szemléletesen azt mutatja meg, hogy a testbe hányszor férne bele az egységnyi élű kocka.

Megjegyzés. Minden pont, egyenes és sík nulla térfogatú.

Def. (Felszín)**.** A test határoló felületének síkba terítésével kapott síkbeli alakzat területe[1]. Szemléletesen azt mutatja meg, hogy a test lefestéséhez hányszor több festék kell, mint az egységnégyzet lefestéséhez. Jele: A.

1. Feladat. Az alábbi testet építettük fel 2 cm élhosszúságú kiskockákból.



1. ábra. Több egybevágó kiskockából készített test.

a.) Hány köbmilliméter egy kiskocka térfogata?

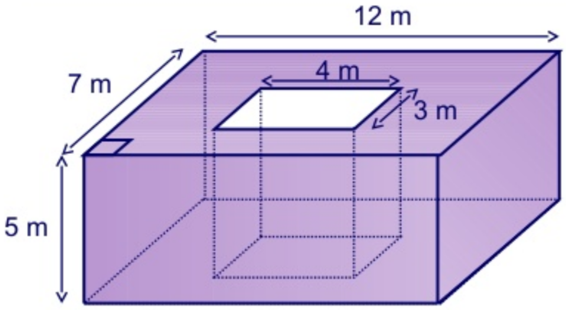
b.) Hány köbdeciméter az ábrán látható test térfogata?

c.) Legalább hány kiskockával lehet kiegészíteni a testet egy tömör nagykockává?

d.) Hány négyzetcentiméter az ábrán látható test felszíne?

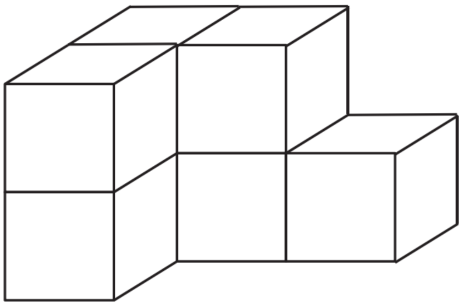
[1] Bizonyos testek, pl. a gömb nem teríthető síkba. Ilyenkor a testet kisebb részekre daraboljuk gondolatban, és ezeket a felületdarabokat közelítjük síkba teríthető alakzatokkakl.

64. Házi feladat. Számítsuk ki az alábbi test térfogatát és felszínét!



2. ábra. Mind a térfogat, mind a felszín több különböző módszerrel is kiszámítható.

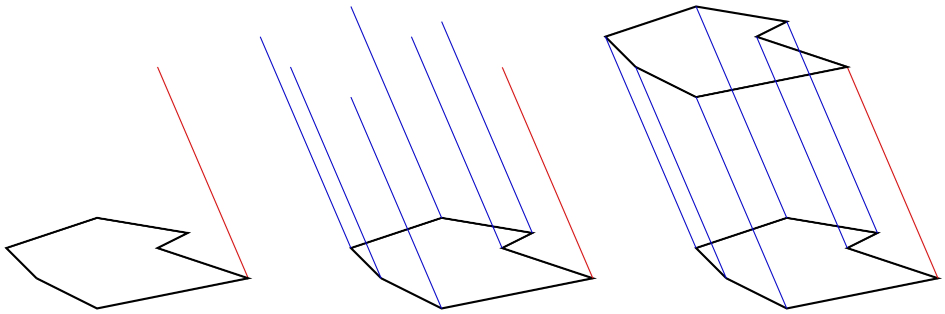
64. Szorgalmi. Hét egybevágó kockából készítettük el az ábrán látható testet. Két szomszédos kocka egy-egy teljes lapjával illeszkedik. Egy kocka térfogata 8 cm^3. Hány cm^2 az ábrán látható test felszíne?



3. ábra. Szorgalmi feladat ábrája.

65. óra Hasábok származtatása

Def. (Hasáb)**.** Adott a síkon egy önmagát nem átmetsző sokszög (alaplap[1]), mely kerületén át húzunk egy olyan egyenest (vezéregyenes), ami nem párhuzamos a síkkal. A vezéregyenest önmagával párhuzamosan körbevezetjük az alaplap kerületén, így egy végtelen hasábfelülethez jutunk. Ha ezt a felületet egy, az eredeti síkkal párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor megkapjuk a hasáb fedőlapját. Az alap- és a fedőlap, illetve a hasábfelület egy hasábot vág ki a térből.



4. ábra. A hasáb származtatásának egyes lépései.

Megjegyzés. A hasábfelület alaplap és fedőlap közé eső részét palástnak nevezzük. A palástot alkotó paralelogrammákat oldallapoknak hívjuk. Az alaplap és fedőlap éleit alapélnek, az oldallapok éleit oldalélnek nevezzük. Az élek találkozási a csúcsok.

Def. (Egyenes és ferde hasáb)**.** Ha a vezéregyenes merőleges az alap- és fedőlapra, akkor egyenes hasábot, egyébként ferde hasábot kapunk.

Def. (Téglatest, négyzetes oszlop, prizma)**.** Egy egyenes hasáb alaplapja ha téglalap, akkor téglatestről, ha négyzet, akkor négyzetes oszlopról, ha pedig háromszög, akkor prizmáról beszélünk.

Def. (Kocka)**.** Olyan hasáb, melynek minden lapja négyzet.

Def. (Szabályos hasáb)**.** Ha egy egyenes hasáb alapja egy szabályos sokszög, akkor szabályos hasábról beszélünk. A sokszögek szimmetria-középpontjaira illeszkedő egyenes a hasáb tengelye.

65. Házi feladat. Egy medence felülről nézve téglalap alakú, szélessége 10 méter, hossza 40 méter. Rövidebb oldalán 1 méter mély és 3 méterig egyenletesen mélyül a másik rövidebb oldal felé haladva. Hány hl-es a medence és hány m^2-en kell lefesteni?

65. Szorgalmi. Készíts egy hasáb modellt!

[1]Az alaplapot röviden alapnak is hívhatjuk.

66. óra Hasáb hálózata, felszíne

Def. (Testháló)**.** A testet határoló felület síkba kiterített, egymáshoz illeszkedő alakzatainak összességét a test hálójának, vagy hálózatának nevezzük[1].

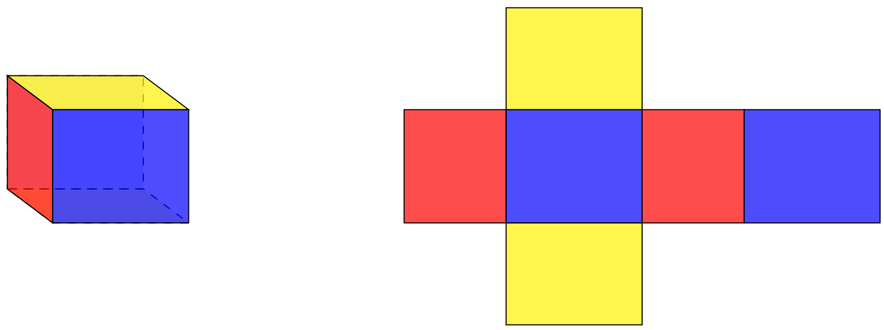
2. Feladat. Rajzoljuk le a következő alakzatok hálózatát és írjunk fel az élek ismeretében egy formulát a felszín kiszámítására!

- Téglatest, melynek élei a, b és c: $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
- Négyzetes oszlop, melynek alapéle a, oldaléle b: $A = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b$
- Prizma, melynek alapja egy $\triangle$, oldaléle h: $A = 2 \cdot T_\triangle + (K_\triangle \cdot h)$
- Kocka, melynek élhosszúsága a: $A = 6a^2$
- Szabályos hatszög alapú egyenes hasáb, melynek alapéle a, oldaléle h:

$$A = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h$$

Állítás. Egy hasáb alaplapjának területe legyen T_k, és a palást síkba terítésével kapott alakzat területét jelölje P. Ekkor a hasáb felszíne:

$$A = 2 \cdot T_k + P$$



5. ábra. Egy hasáb és hálózata. Sárga szín jelzi az alaplapot és a fedőlapot. A piros és kék alakzatok összessége alkotja a palástot.

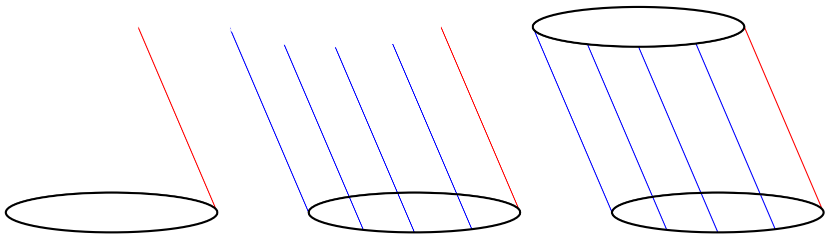
66. Házi feladat. Rajzold le a kocka 11 lehetséges hálózatát!

66. Szorgalmi. Készíts el a kocka hálózatai közül egyet!

[1]Ebből a síkbeli alakzatból a testet újra össze tudnánk hajtani, ha ez mégsem lehetséges, akkor az adott alakzat nem testháló.

67. óra Henger származtatása, térfogata, felszíne

Def. (Hengerszerű test)**.** Adott a síkon egy síkidom (alaplap), mely kerületén át húzunk egy olyan egyenest (vezéregyenes), ami nem párhuzamos a síkkal. A vezéregyenest önmagával párhuzamosan körbevezetjük az alaplap kerületén, így egy végtelen hengerfelülethez jutunk. Ha ezt a felületet egy, az eredeti síkkal párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor megkapjuk a test fedőlapját. Az alap- és a fedőlap, illetve a hengerfelület egy hengerszerű testet vág ki a térből.



6. ábra. Hengerszerű testek származtatásának lépései. A hengerfelület alap- és fedőlap közé eső részét palástnak nevezzük. Az alap- és fedőlap egybevágóak, síkjaik távolságát a henger magasságának nevezzük. A vezéregyenes alap- és fedőlap közé eső szakaszát a test alkotójának nevezzük.

Def. (Körhenger)**.** Ha egy hengerszerű test alaplapja körlap, akkor a testet körhengernek nevezzük. A 6. ábrán ilyen test látható.

Def. (Forgáshenger)**.** Ha egy körhenger vezéregyenese merőleges az alaplap síkjára, akkor a testet forgáshengernek, vagy röviden hengernek nevezzük. Az alap- és fedőlap középpontjaira illeszkedő egyenes a henger tengelye.

Állítás. Hengerszerű testek térfogata az alaplap területének és a magasságnak a szorzata. Ha az alaplap R sugarú kör, akkor a körhengerre felírható, hogy:

$$V_{\text{henger}} = T_k \cdot m \qquad\qquad V_{\text{körhenger}} = R^2 \cdot \pi \cdot m$$

Állítás. Hengerszerű testek hálózata az alap- és fedőlapból, valamint a palástból áll. Forgáshenger esetén a palást egy téglalap, melynek egyik oldala a test magasságával, másik oldala az alaplap kerületével egyezik meg.

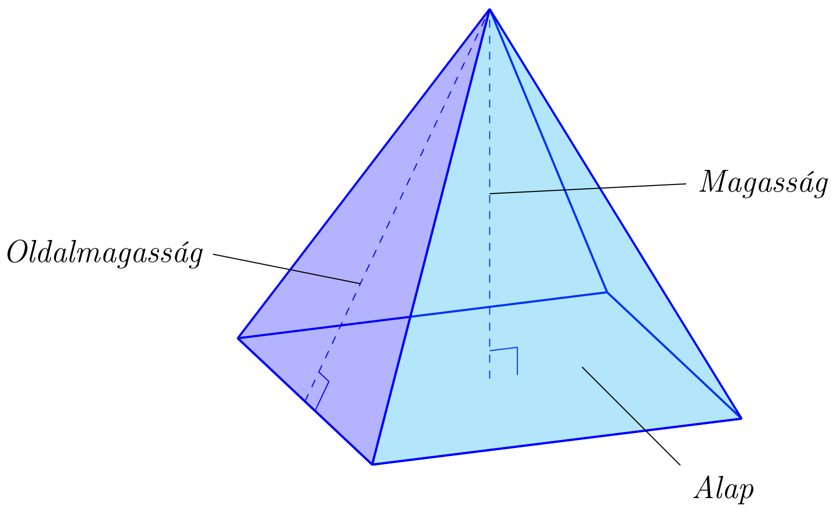
$$V_{\text{forgáshenger}} = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + 2 \cdot R \cdot \pi \cdot m$$

67. Házi feladat. Számold ki egy tetszőleges henger felszínét és térfogatát!

67. Szorgalmi. Írd fel összefüggéseket egy ferde henger térfogatára és felszínére!

68. óra A gúla származtatása, térfogata

Def. (Gúla)**.** Adott az $\mathcal{S}$ síkon egy k sokszög. Indítsunk egyeneseket egy $P \notin \mathcal{S}$ pontból k pontjaiba. Ezen egyenesek és a k által körülzárt térrészt gúlának nevezzük.



7. ábra. A négyzet alapú gúla. A k sokszög csúcsaiból a P pontba induló szakaszokat a gúla alkotóinak nevezzük.

Def. (Egyenes gúla)**.** Olyan gúla, melynek P csúcspontja a k alap szimmetriaközéppontja[1] fölött van.

Def. (Szabályos gúla)**.** Olyan egyenes gúla, aminek az alapja egy szabályos sokszög.

Állítás. A gúla térfogata harmada az azonos magasságú és ugyanolyan alapú hasábnak. Ha az alap egy a oldalhosszúságú négyzet, akkor négyzet alapú egyenes gúláról van szó.

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_k \cdot m}{3} \qquad\qquad V_{\text{négyzet alapú egyenes gúla}} = \frac{a^2 \cdot m}{3}$$

3. Feladat. Egy gúla alapéle 4 cm. Számítsuk ki a gúla térfogatát, ha 7 cm az alkotó. Ha az oldalmagasság lett volna 7 cm, nagyobb vagy kisebb térfogatot kapnánk?

68. Házi feladat. Egy gúla alapéle 5 cm, térfogata 100 cm^3. Mekkora a magassága, az oldalmagassága és az alkotója? ugyanakkora?

68. Szorgalmi. Készíts egy gúla modellt!

[1] Ez csak akkor értelmezhető, ha a k alapsokszög forgásszimmetrikus alakzat.

69. óra A gúla hálózata és felszíne

Állítás. Egy a oldalhosszúságú négyzet alapú, m magasságú egyenes gúla felszíne:

$$A = a^2 + 2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + m^2}$$

4. Feladat. Egy négyzet alakú egyenenes gúla alapéle 4 cm. Határozzuk meg a felszínét, ha tudjuk, hogy 7 cm hosszúságú a gúla...

$a.)$ magassága.

$b.)$ oldalmagassága.

$c.)$ alkotója.

69. Házi feladat. Egy gúla magassága és alapéle egyenlő hosszúságú. Mekkora a gúla oldalmagassága, ha tudjuk, hogy a felszíne 100 cm^2?

69. Szorgalmi. Szabályos hatoldalú gúla alapéle 3,7 cm, magassága 7,4 cm. Számítsuk ki a felszínét!

Irodalomjegyzék

[1] Vörös József: Térfogat és felszín

[2] Sokszínű Matematika tankönyv 8. osztály

[3] Csahóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné – Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Szeredi Éva: Matematika feladatgyűjtemény 8.

[4] Bartha Gábor - Bogdán Zoltán - Duró Lajosné dr. - Dr. Gyapjas Ferencné - Hack Frigyes - Dr. Kántor Sándorné, Dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény I.

[5] Feladatok

[6] Habel: Térfogat dolgozat

[7] Oktatási hivatal: Központi írásbeli feladatsorok